MEGJEGYZÉSEK A VALÓS FÜGGVÉNYEK ITERÁLÁSÁHOZ II.

DR. SZEPESSY BÁLINT

1. Bevezetés

Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ $(a < b)$ zárt intervallumban értelmezett olyan egyértékű valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

1. $f(x)$ az adott szakasz minden belső pontjában folytonos; a kezdő és a végpontban jobbról, illetve balról folytonos;
2. $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumot önmagára képezi le;
3. nincs olyan részintervalluma az adott szakasznak, amelyben $f(x) =$ $=$ constans teljesül.

Az $f(x)$ függvényt iterációs alapfüggvénynek nevezzük az adott intervallumon. Az $f_0(x) = x$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = \quad (f(x)), \ldots, f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) \ldots$ függvényeket az $f(x)$ függvény 0-dik, első, második, ..., n-edik (n-edrendű) ... iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Ha $f(c) = c$, akkor c pontot az $f(x)$ függvény elsőrendű fixpontjának nevezzük. Ha $f_n(c) \neq c$, $n = 1, 2, \ldots$ ..., $r-1$ esetén, de $f_r(c) = c$, akkor c az $f(x)$ függvény r-edrendű fixpontja. Ekkor $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}, c_r$ pontok is páronként különböző r-edrendű fixpontok; a $c_1, c_2, \ldots, c_r$ fixpontok egy r-edrendű ciklust alkotnak.

Már vizsgáltuk azt a kérdést, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén nem lehet a fixpontok (ciklusok) rendszámára felső korlátot adni ([9]). Bebizonyítottuk az alábbi tételt:

Ha az $[a, b]$ szakaszban $f(x)$ az 1., 2., 3. feltételeknek eleget tesz, és van két olyan diszjunkt részszakasz, amelyeket a függvény az egész zárt $[a, b]$ szakaszra képez le, akkor van bármilyen magasrendű ciklus (vagyis a fixpontok rendszáma felülről nem korlátos). Ennek a tételnek a feltételei csak elegendőek bármilyen adott rendű ciklus létezéséhez. Megmutattuk ugyanis, hogy:

Ha $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszban csak az 1., 2., 3. feltételeknek tesz eleget és az $[a, d]$ szakaszt $[d = \sup\limits_{a < x < b} x,\ f(x) = b]$ az egész $[a, b]$ szakaszra $[d, b]$-t pedig a $[h, b]$ szakaszra képezi le, ahol $h \leqq c_1$; $c_1 = \max\limits_{x \varepsilon [a, d]} f(x)$, $f(x) = c$ és $c = \sup\limits_{x \varepsilon [d, b]} x$, $f(x) = x$; akkor a fixpontok rendszáma felülről nem korlátos ([9]).

Az elmélet szempontjából érdekes (s mivel előbbi tételünk feltételei csak elégségesek, felvetődött) az a kérdés, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén lehet a fixpontok (ciklusok) rendszámára felső korlátot adni. Ebben a dolgozatban véges szakaszt önmagára leképező folytonos (azaz az 1., 2., 3. feltételeket kielégítő) alapfüggvény esetén azt a kérdést vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett lehetnek csupán első vagy másodrendű fixpontok.

2. Az első- és másodrendű ciklusokról

Tétel: Ha valamely $[a', b']$ $(a' < b', a', b' \varepsilon [a, b])$ szakaszt a benne monoton növekvő iterációs alapfüggvény a szakaszra magára vagy magába képez le, akkor ebben a szakaszban legfeljebb elsőrendű fixpontok lehetnek.

Bizonyítás: Tegyük fel, állításunkkal ellentétben, hogy van r-edrendű ciklus; legyen ilyen pl.: $c, c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}$, ahol $r \geqq 2$ és $f(c_{r-1}) = c_r = c$.
Feltehető, hogy c a legkisebb abszcisszájú fixpont; azaz

$$c < c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}$$

(A jobb oldalon levő fixpontok sorrendje nem okvetlenül nagyságszerinti!)

A $c < c_{r-1}$ egyenlőtlenségből az $f(x)$ monoton növekedése miatt

$$f(c) < f(c_{r-1})$$

következik. De $f(c) = c_1$ és $f(c_{r-1}) = c$ miatt $c_1 < c$, azzal ellentétben, hogy c a ciklus legkisebb eleme. Nem lehet tehát $r \geqq 2$.

Megjegyzés: Az $[a' b']$ szakaszban mindig van legalább egy elsőrendű fixpont. Az egész szakaszon ugyanis $f(x) - x > 0$ (vagy $f(x) - x < 0$) nem teljesülhet, mert $f(x) - x > 0$ $(f(x) - x < 0)$ esetén $f(x)$ nem képezi le a szakaszt önmagára vagy önmagába. (1. ábra.)

Előfordulhat az is, hogy az $[a', b']$ szakaszban végtelen sok elsőrendű fixpont van. Ekkor ezek torlódási pontjai is elsőrendű fixpontok. Legyenek ugyanis $C_1 C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ elsőrendű fixpontok, legyen C torlódási pontjuk; mivel

$$C = \lim_{i \to \infty} C_{n_i} \qquad \text{és} \qquad f(C_{n_i}) = C_{n_i}$$

így

$$C = \lim_{i \to \infty} C_{n_i} = \lim_{i \to \infty} f(C_{n_i}) = f(\lim_{i \to \infty} C_{n_i}) = f(C)$$

ezért C is elsőrendű fixpont.

Végül az is előfordulhat, hogy az $[a', b']$ szakasz csupa elsőrendű (taszító) fixpontból áll. Ilyenkor $f(x) = x$ az egész $[a', b']$ intervallumon.

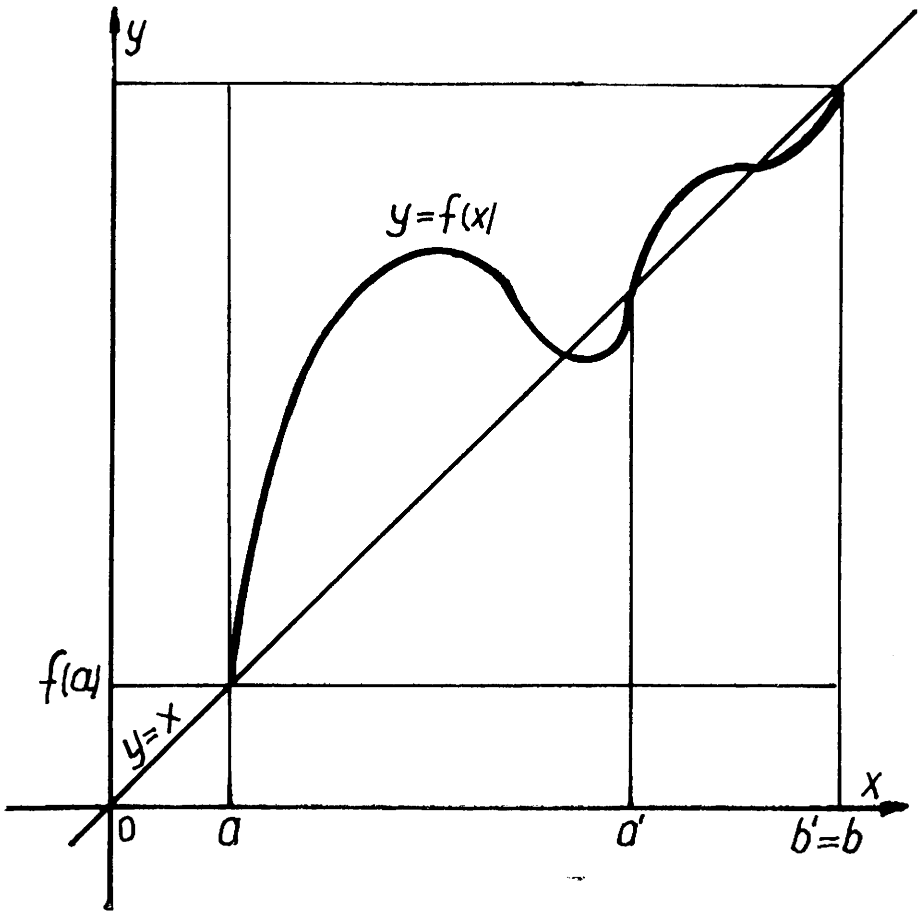
Tétel: Ha valamely $[a', b']$ $(a', b', \varepsilon [a, b])$ szakaszt a benne monoton csökkenő iterációs alapfüggvény a szakaszra magára vagy magába képez le, akkor ebben a szakaszban csak első és másodrendű fixpontok lehetnek.

Bizonyítás: A tétel visszavezethető az előbbi tételre, ha figyelembe vesszük, hogy az $[a', b']$ szakaszban monoton csökkenő függvényre

$$f(a') \geqq f(x) \geqq f(b')$$

egyenlőtlenségek teljesülnek és így $f(x) - x$ az a' helyen pozitív a b' helyen negatív értékű. Az $f(x)$ folytonossága miatt van tehát egy megoldása az $f(x) - x = 0$ egyenletnek, és ez az egyetlen c elsőrendű fixpont.

Monoton csökkenő függvény monoton csökkenő függvénye (iteráltja) monoton növekvő, ezért $f_2(x)$ függvény az $[a', b']$ szakaszt önmagára vagy önmagába leképező monoton növekvő függvény (2. ábra). Erre mint alapfüggvényre alkalmazható tehát az előbbi tétel; az $f_2(x)$ függvénynek csak elsőrendű fixpontjai lehetnek, s ezek a c pont kivételével mind másodrendű fixpontjai az $f(x)$ függvénynek. Igaz tehát az állítás.

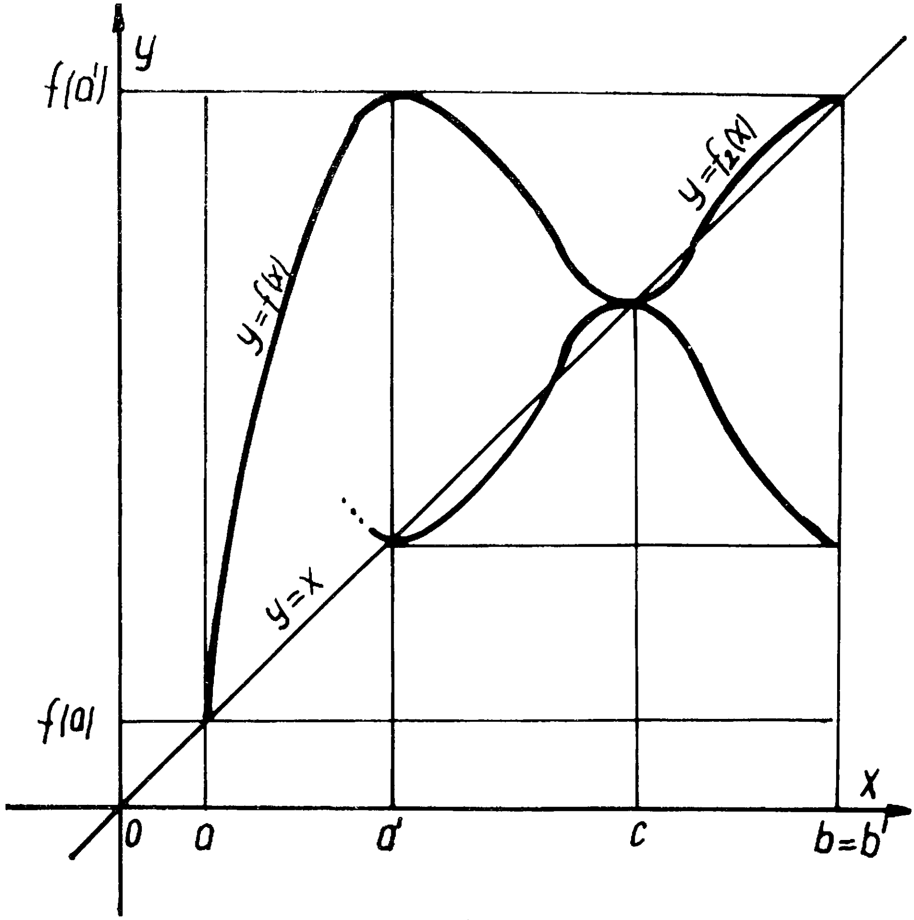


1. ábra

Például az $f(x) = -(x-1)^3 + 1$ a $[0, 2]$ szakaszban kielégíti feltételeinket; az $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ másodrendű fixpontok, s első tételünk értelmében ennél magasabbrendű fixpontok nincsenek.

Speciális esetek. Csupa másodrendű fixpontból álló (szinguláris) szakaszok is felléphetnek. Például az $f(x) = 1 - x$ függvény esetén a $[0, 1]$ szakaszban, vagy az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynél az $[a, \frac{1}{a}]$ $(0 < a < 1)$ szakaszban. (Az előbbi példánál a $c = \frac{1}{2}$, az utóbbinál a $c = 1$ elsőrendű fixpont kivételével az adott szakaszok minden pontja másodrendű fixpont.)

Általánosabban: bármely másodrendű ciklus fixpontjai egymás tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan. Ha tehát az $y = f(x)$ görbe ilyen tükörképíveket tartalmaz, akkor ezek mindig másodrendű fixpontokból álló szakaszok.



2. ábra

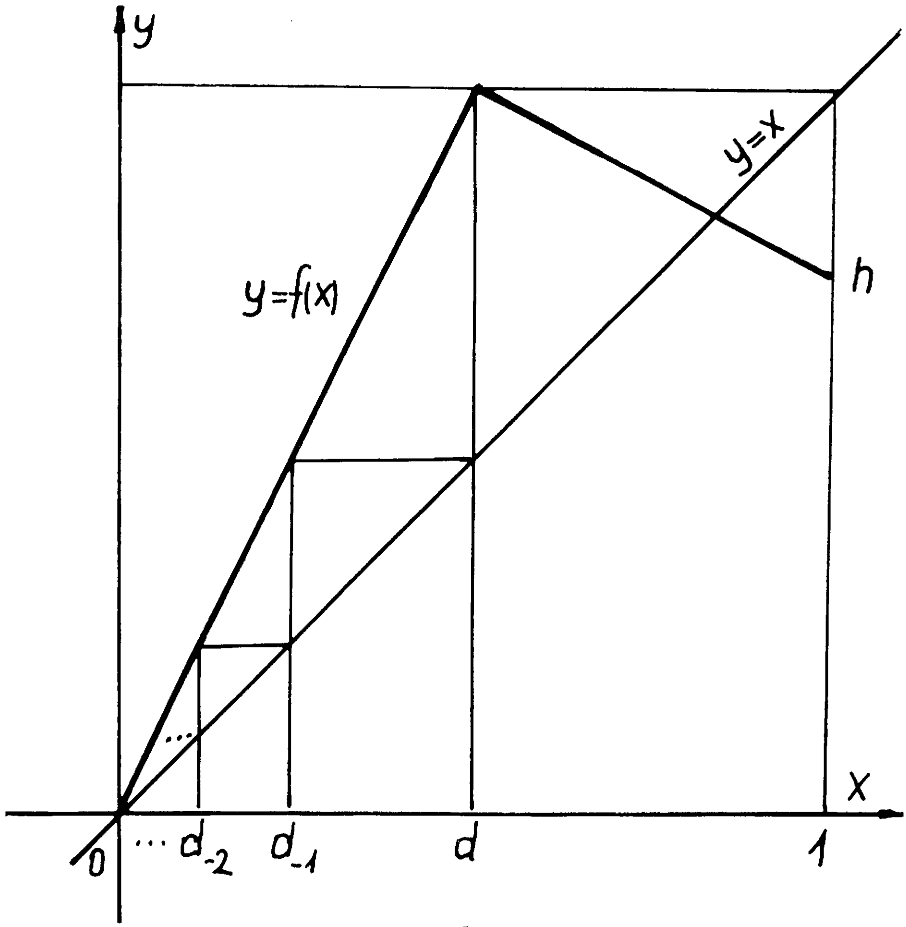
Az előbbi tétel feltételei nem szükségesek csak elegendőek ahhoz, hogy csak első és másodrendű fixpontok létezzenek. Ezt igazolja a következő egyszerű példa.

Legyen a [0, 1] szakaszban értelmezett iterációs alapfüggvény az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{d}\, x & \text{ha } 0 \leqq x \leqq d \\ \dfrac{1-h}{d-1}\,(x-d)+1 & \text{ha } d \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

ahol $h < 1$, $d > 0$ (3. ábra).

Ha itt $d \leqq h$, akkor a $(0, d)$ szakasz bármely x_0 pontjából kiinduló iterációs pontsorozatnak csak véges számú pontja van e szakaszban annak megfelelően, hogy a kezdőpont (a 3. ábra szerinti jelölésben) a $(d_{-(i+1)}, d_{-i})$ $(i = 0, 1, 2, 3,\ldots)$ szakaszok melyikében van. Ezek a szakaszok ugyanis egyszeresen és teljesen lefedik a $(0, d]$ szakaszt; van tehát olyan x_j $(j > i)$ iterált pont, amelyik a



3. ábra

[d, 1] szakaszba esik. Márpedig ezt a szakaszt az f (x) függvény h > d esetén önmagába, h = d esetén önmagára képezi le, tehát x_j minden iterált pontja benne marad a szakaszban. Az előbbi tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy legfeljebb másodrendű ciklusok lehetségesek.

Ez a példa arra mutat, hogy általánosabb esetekben is hasonló lehet a helyzet. Valóban igaz a következő:

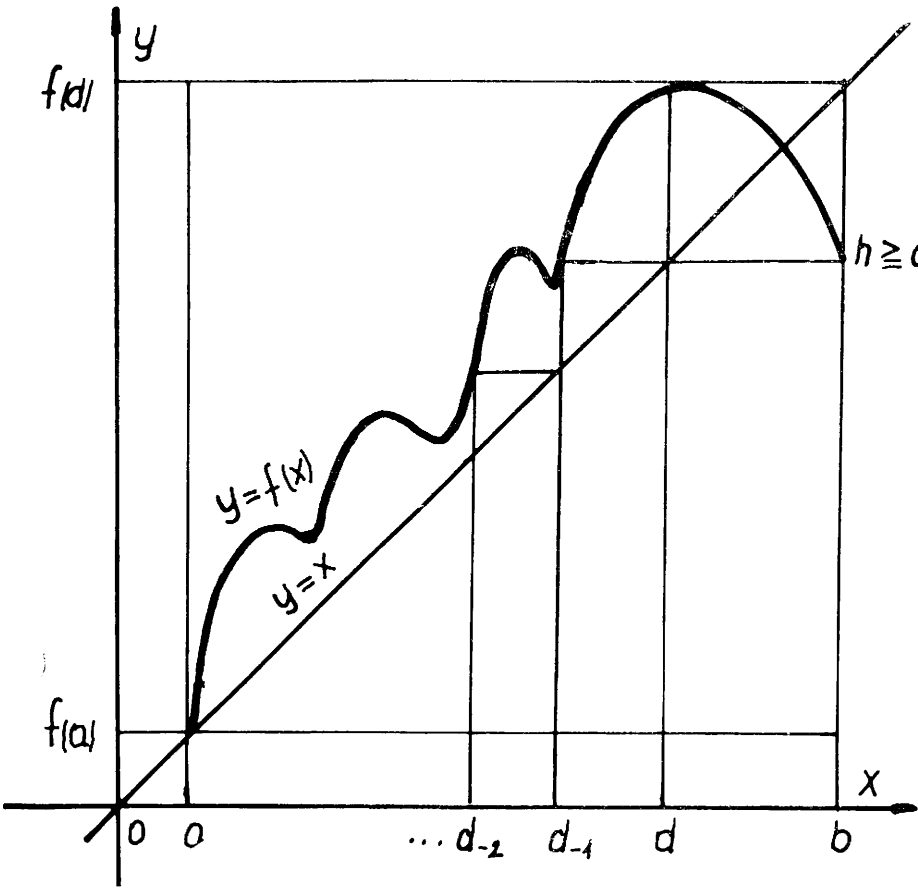
Tétel: Ha f (x) olyan iterációs alapfüggvény, amelyre f (a) = a, f (d) = b $/a \angle d \angle b/$, $f\,a/ = h \leqq d$ teljesül és $a < x < d$ esetén $x < f(x) < b$, valamint f (x) a [d, b] szakaszban monoton csökkenő, akkor az [a, b] szakaszban csak első és másodrendű fixpontok lehetnek.

Bizonyítás: Mivel f (x) folytonos az [a, d] szakaszban és minden [a, b] szakaszbeli értéket felvesz, ezért létezik ebben a szakaszban a d pontnak legalább egy inverz-iterált pontja. Tekintsük a *d* pont (a, d] szakaszbeli inverz-iteráltjai közül azt, amelynek abszcisszája a legnagyobb és jelöljük ezt d_{-1}-gyel. Tehát

$_{-1} = \max_{a<x<d}\{x,\} f/x/ = d$. Ezek után képezzük az előbbi eljárásnak megfelelően a $d_{-2} = \max_{a<x<d_{-1}} \{x\}$, $f/x/ = d_{-1}$, d_{-3}, $\ldots d_{-(n-1)}$, $d_{-n} = \max_{a<x<d_{-(n-1)}}$, $\{x\}$, $f/x/=d_{-(n-1)}$, $\ldots$ inverx-iterált pontokat. A $(d_{-(i+1)}, d_{-i}]$ $(i=0, 1, 2, 3, \ldots)$ szakaszok egyszeresen és teljesen lefedik az (a, d] szakaszt. Az (a, d] szakasz bármely pontjából kiinduló iterációs pontsorozatnak csak véges számú pontja van e szakaszban, s ez legfeljebb i ha a kezdőpont $(d_{-(i+1)} ; d_{-i}]$ szakaszban van. Lesz tehát olyan x_j iterált pont, amelyik a [d, b] szakaszba esik. (4. ábra). Ezt a szakaszt pedig f/x/ önmagába vagy önmagára képezi le, tehát x_j minden iteráltja ebben a szakaszban marad. Ezért az előbbi tétel alkalmazásával adódik, hogy legfeljebb másodrendű fixpontok lehetnek az [a, b] szakaszban.

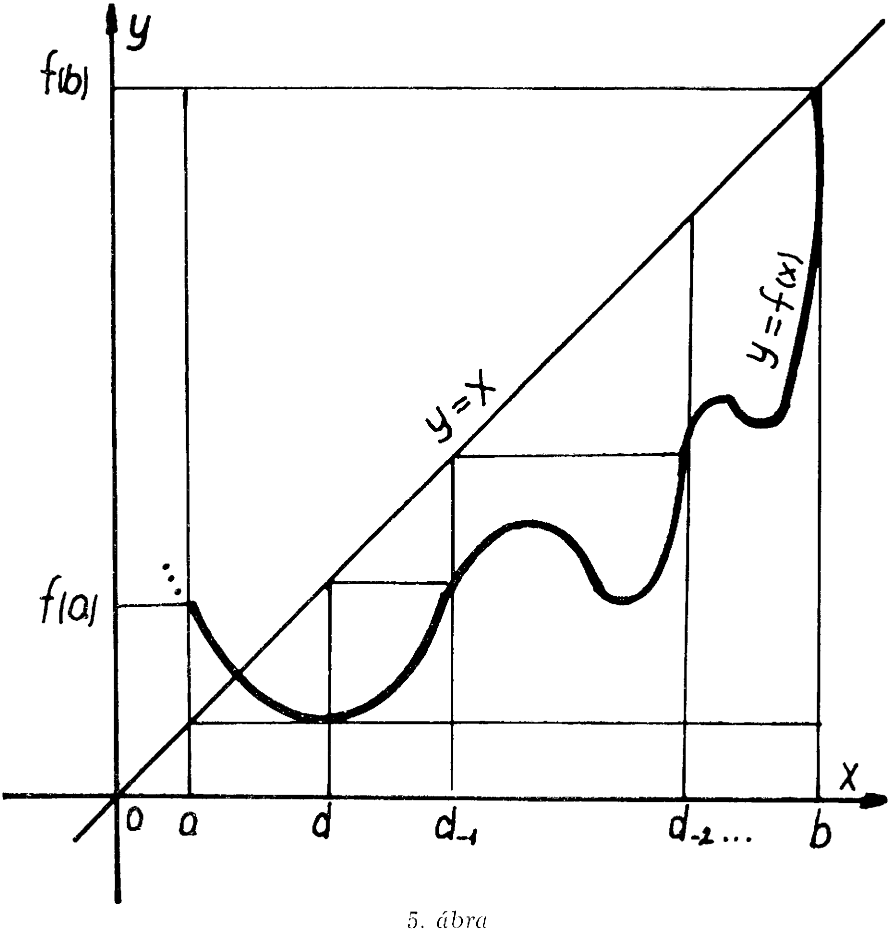
E tételéhez hasonló bizonyítással igazolható a következő

Tétel: Ha f/x/ olyan iterációs alapfüggvény, amelyre $f/b/ = b$, $f/d/ = a$ $/a \angle d \angle b/$, $f/a/ = h \leqq d$ teljesül és $d<x<b$ esetén $x>f/x/>a$, továbbá f/x/ az [d, b] szakaszban monoton csökkenő, akkor csak első és másodrendű fixpontok lehetnek az [a, b] szakaszban.



4. ábra

Most az [d, b] szakasz bármely x_0 pontjából induló iterációs pontsorozatnak lesz véges számú pontja e szakaszban, s ez legfeljebb i ha x_0 pont a $[d_{-i}, d_{-(i+1)})$ szakaszba esik. A [d, b) szakaszt lefedő részintervallumokat kell csak másképpen definiálni. Ezek a $[d_{-i}, d_{-(i+1)})$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ szakaszok lesznek, ahol $d_{-i\,(i+1)} = \inf x,\ f(x) = d_{-i}$ (azaz $d_{-i\,(i+1)}$ a $[d_{-i}, b)$ szakaszban a legkisebb abszcisszaérték, amelyben f (x) d_{-i} értékű). Van tehát olyan x_j $(j > i)$ iterált pont, amelyik az [a, d] szakaszba esik (5. ábra). Itt f (x)-re a második tétel feltételei teljesülnek, így legfeljebb másodrendű fixpontok lehetségesek. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.



5. *ábra*

Az eddigiek alapján konstruálhatók olyan iterációs alapfüggvények, amelyekre a fixpontok rendszáma felülről nem korlátos [9], valamint olyanok, amelyekre legfeljebb másodrendű fixpontok (ciklusok) léteznek.

További vizsgálódás tárgyát képezi, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén lehetnek másodrendűnél magasabbrendű, de felülről korlátos ciklusok. Ezzel a kérdéssel egy ezt követő dolgozatban foglalkozunk.

IRODALOM

[1] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen I. Publ. Math. (Debrecen) 7 (1960), 16—40.

[2] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen II. Publ. Math. (Debrecen) 13 (1966), 169—172.

[3] B. BARNA, Berichtigung zur Arbeit „Über die Iteration reeller Funktionen II" Publ. Math. (Debrecen) 20 (1973), 281—282.

[4] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen III. Publ. Math. (Debrecen) 22 (1975), 269—278.

[5] L. BERG, (Rostock) Über irreguläre Iterations-folgen Publ. Math. (Debrecen) 17 (1970), 112—115.

[6] A. RALSTON, A first course in numerical analysis (Mc Graw—Hill Inc.), New York, 1965.

[7] A. BJÖREK, — G. DAHLQUIST, Numerische Methoden (Oldenburg Verl.) München—Wien, 1972.

[8] J. STOER, Einführung in die Numerische Mathematik I. (Springer) Berlin—Heidelberg—New York, 1972.

[9] SZEPESSY B., Megjegyzések a valós függvények iterálásához I. Az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Füzetei XV. (Eger, 1979), 395—405.

REMARKS ON ITERATION OF REAL FUNCTION

By Bálint Szepessy

(Summary)

Let f (x) be a real valued function defined on interval [a, b]. If f (x) satisfies the conditions

(i) f (x) is a continuous function at every inside points of the interval [a, b]; furthermore f (x) is continuous on the right and on the left at point a and b respectively;

(ii) f (x) maps the interval [a, b] onto itself;

(iii) there is no subinterval of the interval [a, b] where f (x) is a constant function;

then f (x) is called iterational basic function. Let us define the iterated functions of f (x) by $f_0(x) = x$, $f_1(x) = f(x)$ and $f_n(x) = f(f_{n-1}/x/)$ for $n > 1$. If $f(c) = c$ for some real c then c is called fix point of f (x) of order one, and if $f_n(c) \neq c$ for $n = 1, 2, \ldots, r-1$ but $f_r(c) = c$ then c is called fix point of f (x) of order r.

In [9] we studied the iterational basic functions f (x) having fix points and we gave sufficient conditions for f (x) which have fix points of order $r > k$, where k is an arbitrary integer.

In this paper conditions are studied for f (x) satisfying restrictions (i), (ii) and (iii) and having fix points of order $r \leqq 2$.

Among others we prove the following theorem:

Let d be a real number with $a < d < b$.

If the function f (x) satisfies the conditions $f(a) = d$, $f(d) = b$, $f(b) \geqq d$; f (x) is a monotonically decreasing function on interval [d, b], and in case $a < x < d$ we have $x < f(x) < b$ then there are fix points only of order one or of order two on interval [a, b].